

附录

附录 1:

文中式 (2) 中, 对于 $l=1, \dots, p$, $\mathbf{m}(\cdot)$ 的一阶泰勒展开式为:

$$m_l(\mathbf{Z}_{it}) \approx m_l(z) + (\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{Z}_{it} - z))(\mathbf{H}m'_l(z)) + \frac{1}{2}r_{H,l}(\mathbf{Z}_{it}, z)$$

其中 $m'_l(z) = \partial m_l(z) / \partial z$, $r_{H,l}(\mathbf{Z}_{it}, z) = (\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{Z}_{it} - z))^T \left(\mathbf{H} \frac{\partial^2 m_l(z)}{\partial z \partial z^T} \right) (\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{Z}_{it} - z))$ 。定

义 $\beta_l(z) = [m_l(z), [\mathbf{H}m'_l(z)]^T]^T$ 为 $(1+q) \times 1$ 维向量, $\beta = [\beta_1(z), \dots, \beta_p(z)]^T$ 为 $p \times (q+1)$ 维向

量, 然后将 β 转换成 $p(q+1) \times 1$ 维的向量 $\text{vec}\beta(z)$ 。同样还定义 $\mathbf{G}_{it}(z, \mathbf{H}) = [1, \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{Z}_{it} - z)^T]^T$

为 $(q+1) \times 1$ 维向量。根据以上定义, 有 $\mathbf{X}_{it}^T \mathbf{m}(z) \mathbf{G}_{it}(z, \mathbf{H}) = (\mathbf{G}_{it}(z, \mathbf{H}) \otimes \mathbf{X}_{it})^T \text{vec}\beta(z)$ 以及

$$\mathbf{R}_i(z, \mathbf{H}) = \begin{bmatrix} (\mathbf{G}_{i,1}(z, \mathbf{H}) \otimes \mathbf{X}_{i1})^T \\ \vdots \\ (\mathbf{G}_{i,T}(z, \mathbf{H}) \otimes \mathbf{X}_{iT})^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}(z, \mathbf{H}) = [\mathbf{R}_1(z, \mathbf{H})^T, \dots, \mathbf{R}_N(z, \mathbf{H})^T]^T, \quad \mathbf{R}_i(z, \mathbf{H}) \text{ 为}$$

$T \times p(q+1)$ 维矩阵且 $\mathbf{R}(z, \mathbf{H})$ 为 $NT \times p(q+1)$ 维矩阵。将文中式 (3) 的目标函数写成如下矩阵形式:

$$\min_{\beta(z)} [Y - \mathbf{R}(z, \mathbf{H}) \text{vec}\beta(z)]^T \tilde{\mathbf{W}} [Y - \mathbf{R}(z, \mathbf{H}) \text{vec}\beta(z)]$$

其中, $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{K}^T \mathbf{W}_H(z) \mathbf{K}$ 且 $\mathbf{K} = \mathbf{I}_{NT} - \mathbf{D} [\mathbf{D}^T \mathbf{W}_H(z) \mathbf{D}]^{-1} \mathbf{D}^T \mathbf{W}_H(z)$ 。因为 $\mathbf{K} \mathbf{D} \alpha = \mathbf{0}_{NT}$, $\mathbf{0}_{NT}$ 为

$NT \times 1$ 维零向量, 所以 $\mathbf{D} \alpha$ 从式子里被消除。求解上式, 得到 $\beta(z)$ 的估计量为

$\hat{\beta}(z) = [\mathbf{R}(z, \mathbf{H})^T(z) \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{R}(z, \mathbf{H})]^{-1} \mathbf{R}(z, \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{W}} Y$, 则 $\mathbf{m}(\cdot)$ 函数系数估计量表达式如下:

$$\hat{\mathbf{m}}(z) = [\mathbf{i}_d, \mathbf{0}_d] [\mathbf{R}(z, \mathbf{H})^T(z) \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{R}(z, \mathbf{H})]^{-1} \mathbf{R}(z, \mathbf{H}) \tilde{\mathbf{W}} Y$$

附录 2:

2. 估计趋势项。

定义一般非参数面板模型:

$$Y_{it}^* = f^*\left(\frac{t}{T}\right) + e_{it}$$

使用局部线性估计得到 $\hat{f}^*(t/T)$, $f^*(t/T)$ 的一阶泰勒展开式为:

$$f^*\left(\frac{t}{T}\right) \approx f^*(u) + f^{*'}(u) \left(\frac{t}{T} - u\right)$$

其中, $u \in [0, 1]$ 。通过最小化:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left[Y_{it}^* - a - b \left(\frac{t}{T} - u \right) \right]^2 k \left(\frac{t - uT}{Th_f} \right) \quad (1)$$

得到 $f^*(u)$ 的估计量。其中， a 和 b 分别表示 $f^*(u)$ 和 $f^{*'}(u)h_f$ ， h_f 为带宽。定义：

$$\mathbf{Q}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{T} - u \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{T}{T} - u \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}(u) = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{Q}(u), \mathbf{W}^*(u) = \text{diag} \left(k \left(\frac{1 - uT}{Th_f} \right), \dots, k \left(\frac{T - uT}{Th_f} \right) \right), \tilde{\mathbf{W}}^*(u) = \mathbf{I}_N \otimes \mathbf{W}^*(u), k(\cdot) \text{ 为}$$

核函数。将式 (1) 写成矩阵形式如下：

$$\left[\mathbf{Y}^* - \tilde{\mathbf{Q}}(u)(a, b)^T \right]^T \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \left[\mathbf{Y}^* - \tilde{\mathbf{Q}}(u)(a, b)^T \right] \quad (2)$$

最小化式 (2) 得到：

$$\hat{f}^*(u) = (1, 0) \left[\tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}}(u) \right]^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \mathbf{Y}^*.$$

附录 3:

定理 1 的证明可以参考 Sun 等 (2009)，如下为定理 2 的简要证明。

引理 1 当给定文中假设成立时，且 $T, N \rightarrow \infty$ ，有

$$\frac{1}{NTh_f} \tilde{\mathbf{Q}}(u)^T \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}}(u) - \mathbf{A}_\mu = o_p(1)$$

其中， $\mathbf{A}_\mu = \text{diag}(\mu_0, \mu_2)$ 。

证明：根据估计方法中，有

$$\frac{1}{NTh_f} \tilde{\mathbf{Q}}(u)^T \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}}(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) & \frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T \left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) \\ \frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T \left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) & \frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T \left(\frac{t-uT}{Th_f}\right)^2 K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) \end{pmatrix}$$

可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) &= \mu_0 + o(1) \\ \frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T \left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) &= o(1) \\ \frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T \left(\frac{t-uT}{Th_f}\right)^2 K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) &= \mu_2 + o(1) \end{aligned}$$

以上等式可以通过简单计算矩阵中元素的期望与方差得到，以第一个等式为例：

$$\mathbb{E} \left(\frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) \right) = \mu_0 \quad \text{且} \quad \text{Var} \left(\frac{1}{Th_f} \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) \right) = O \left(\frac{1}{Th_f} \right).$$

矩阵中其他项类似。由此得到引理 1 成立。

引理 2 当文中假设 2，且 $T, N \rightarrow \infty$ ，存在

$$\Xi(1) = \frac{1}{2} \mu_2 f''(u) h_f^2 + o_p(h_f^2)$$

证明：根据 $f(\cdot)$ 的泰勒展开式，有：

$$f\left(\frac{t}{T}\right) \approx f(u) + f''(u) \left(\frac{t}{T} - u\right) + \frac{1}{2} f''(u) \left(\frac{t}{T} - u\right)^2$$

引理 2 成立。

引理 3 根据文中假设且 $T, N \rightarrow \infty$ 时，有：

$$\frac{1}{\sqrt{NTh_f}} (1, 0) \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \mathbf{e} \xrightarrow{d} N(0, \nu_0(\sigma^2 + 2 \sum_{t=1}^T c_e(t)))$$

证明：已知有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \mathbf{e} &= \left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) e_{it}, \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) e_{it} \right)^T \\ \frac{1}{\sqrt{NTh_f}} (1, 0) \tilde{\mathbf{Z}}^T \mathbf{W}(z, u) \mathbf{e} &= \frac{1}{NTh_f} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) e_{it} \end{aligned}$$

该式子的期望有：

$$\frac{1}{\sqrt{NTh_f}} E\left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) e_{it}\right) = 0$$

方差：

$$\begin{aligned} \frac{1}{NTh_f} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) e_{it}\right) &= \frac{1}{NTh_f} E\left(\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T K\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) e_{it}\right)^2 \\ &= \frac{1}{NTh_f} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T K^2\left(\frac{t-uT}{Th_f}\right) E(e_{it})^2 = \nu_0 \left(\sigma^2 + 2 \sum_{t=1}^T c_e(t) \right) + o(1) \end{aligned}$$

则引理 3 成立。

定理 2 的证明：

根据文中估计方法得到的 $f(\cdot)$ 估计量的表达式：

$$\hat{f}(u) = (1, 0) \left[\tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \mathbf{y}$$

有：

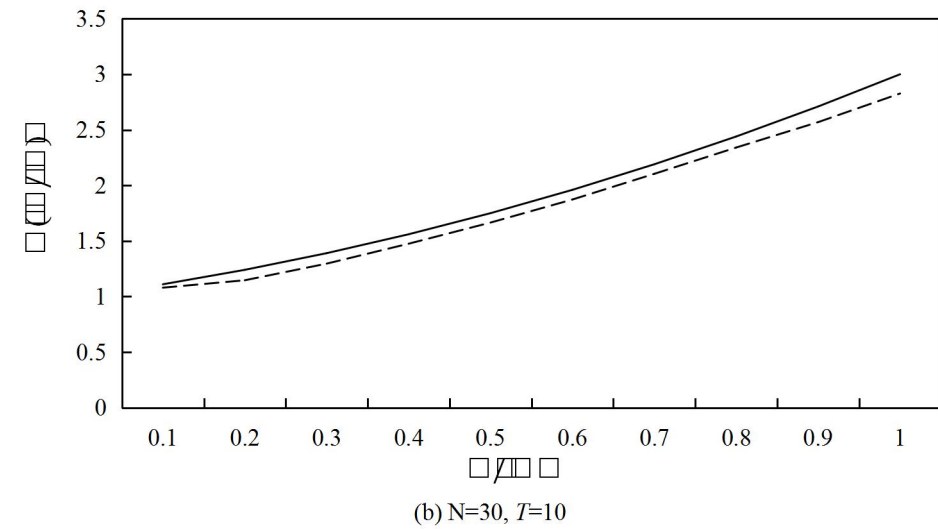
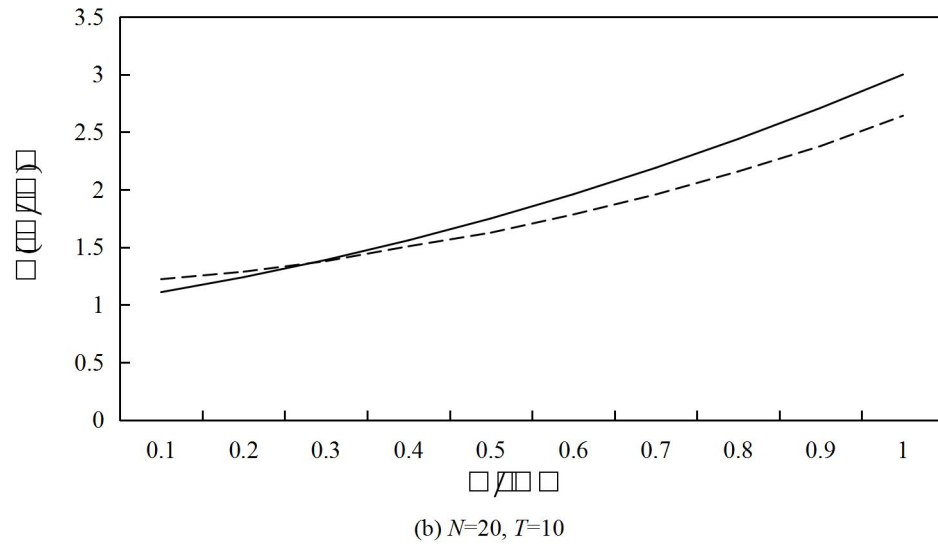
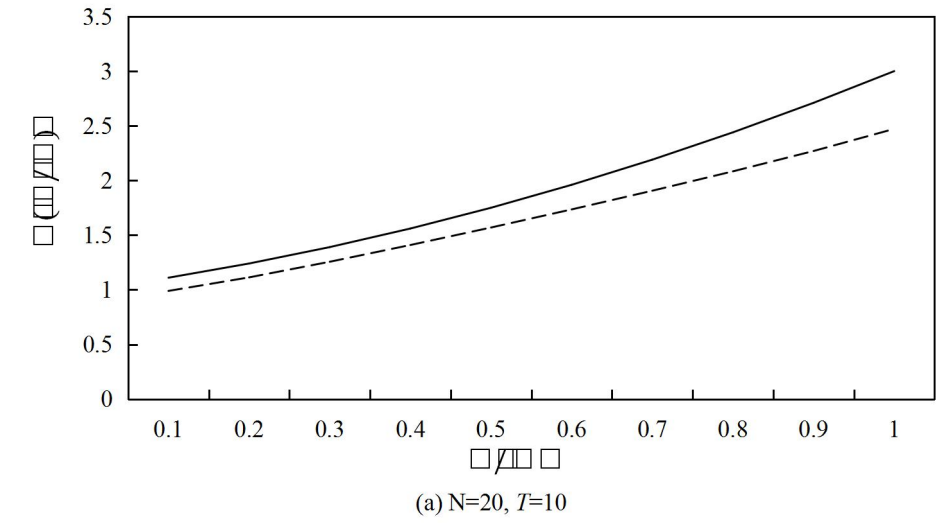
$$\begin{aligned} \hat{f}(u) - f(u) &= (1, 0) \left[\tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \mathbf{y} - f \\ &= (1, 0) \left[\tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) (\mathbf{f}^* - \mathbf{f}) + (1, 0) \left[\tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \mathbf{e} \quad \text{其} \\ &= \Xi(1) + \Xi(2) \end{aligned}$$

中，

$$\Xi(1) = (1, 0) \left[\tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) (\mathbf{f}^* - \mathbf{f})$$

$$\Xi(2) = (1, 0) \left[\tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \tilde{\mathbf{Q}} \right]^{-1} \tilde{\mathbf{Q}}^T(u) \tilde{\mathbf{W}}^*(u) \mathbf{e}$$

则根据以上引理 1-3，定理 2 成立。



附图 1 $f(\cdot)$ 的估计量与真实值

注：图中的虚线与实线分别为 $f(\cdot)$ 的估计量与真实值。

附表 1 模拟 1 中估计量 $\hat{m}$ 和 $\hat{f}$ 的均方根误差（AMSE）

$T \backslash N$	10		20		30	
$m(Z) = \sin(0.25\pi Z)$						
	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.1901	0.0142	0.0566	0.0070	0.0341	0.0053
20	0.0800	0.0075	0.0270	0.0045	0.0160	0.0037
30	0.0450	0.058	0.0175	0.0037	0.0109	0.0032
$m(Z) = \exp(-0.4(Z - 0.2)^2)$						
	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.2013	0.0142	0.0567	0.0070	0.0341	0.0053
20	0.0799	0.0075	0.0270	0.0045	0.0160	0.0037
30	0.0449	0.0058	0.0175	0.0037	0.0109	0.0032
$m(Z) = \log(Z^2 + 1)$						
	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.1898	0.0142	0.0566	0.0070	00340	0.0053
20	0.0798	0.0075	0.0271	0.0045	0.0160	0.0037
30	0.0449	0.0058	0.0175	0.0037	0.0108	0.0032
$m(Z) = Z^2 + 0.3Z$						
	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.2062	0.0143	0.0586	0.0070	0.0350	0.0053
20	0.0814	0.0075	0.0285	0.0045	0.0175	0.0037
30	0.0461	0.0058	0.0191	0.0037	0.0120	0.0032

附表 2 三种模型在不同样本下的 AMSE 结果（ $m(Z) = \sin(0.25\pi Z)$ ）

T	10	20	30
$N = 10$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0525	0.0315	0.0169
固定效应面板模型	0.0847	0.0667	0.0588
传统变系数面板模型	0.5308	0.2543	0.1677
$N = 20$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0513	0.0162	0.0086
固定效应面板模型	0.0711	0.0581	0.0541
传统变系数面板模型	0.4967	0.2442	0.1653
$N = 30$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0307	0.0121	0.0062

附表 2 模拟 2 中数据估计量 $\hat{m}$ 和 $\hat{c}$ 的均方根误差 (AMSE)

--	--	--	--

当 $b = 0.5$ 、 $b_1 = 0$ 时

	A	A	A	A	A	A
--	---	---	---	---	---	---

当 $b = 0$ 或 $b = 0.5$ 时

--	---	---	---	---	---

附表 4 模拟 3 中数据估计量 $\hat{m}$ 和 $\hat{c}$ 的均方根误差 (AMSE)

--	--	--	--

$$Y_{\text{H}} = 0.75 Y_{\text{H}} + 0.25 \xi$$

	$\hat{c}_{111}$	$\hat{c}_{11}$	$\hat{c}_{111}$	$\hat{c}_{11}$	$\hat{c}_{111}$	$\hat{c}_{11}$
--	-----------------	----------------	-----------------	----------------	-----------------	----------------

$$Y_t = 0.9 Y_{t-1} + \xi_t$$

	$\hat{\beta}_{\text{III}}$	$\hat{\beta}_{\text{I}}$	$\hat{\beta}_{\text{II}}$	$\hat{\beta}_{\text{I}}$	$\hat{\beta}_{\text{III}}$	$\hat{\beta}_{\text{I}}$
--	----------------------------	--------------------------	---------------------------	--------------------------	----------------------------	--------------------------

附表 5 模拟 4 中数据估计量 $\hat{m}$ 和 $\hat{c}$ 的均方根误差 (AMSE)

--	--	--	--

Gaussian 核[illegible]Exponential 核

	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.0604	0.0132	0.0291	0.0082	0.0184	0.0069
20	0.0286	0.0084	0.0146	0.0063	0.0094	0.0056
30	0.0197	0.0070	0.0096	0.0056	0.0068	0.0051

均匀核

	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.1707	0.0149	0.0517	0.0082	0.0315	0.0064
20	0.0687	0.0087	0.0251	0.0059	0.0152	0.0050
30	0.0409	0.0072	0.0047	0.0017	0.0032	0.0015

附表 6 模拟 5 中数据估计量 $\hat{m}$ 和 $\hat{f}$ 的均方误差 (AMSE)

$T \backslash N$	10	20	30
------------------	----	----	----

$\dot{\eta}_{it} = 0.5\eta_{i-1,t} + \eta_{it}$

	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.2071	0.0246	0.0600	0.0116	0.0342	0.0084
20	0.0749	0.0130	0.0283	0.0077	0.0181	0.0058
30	0.0435	0.0094	0.0190	0.0053	0.0108	0.0049

$\eta_{it} = 0.5 \eta_{i-1,t} + \eta_{it}$

	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$	$\hat{m}$	$\hat{f}$
10	0.1956	0.0325	0.0580	0.0161	0.0334	0.0117
20	0.0727	0.0190	0.0278	0.0112	0.0178	0.0082
30	0.0436	0.0138	0.0190	0.0082	0.0113	0.0062

附表 7 三种模型在不同样本下的 AMSE 结果 ($\dot{\eta}_{it} = 0.5\eta_{i-1,t} + \eta_{it}, i \geq 1, \eta_{0t} = 0$)

T	10	20	30
$N = 10$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0166	0.0178	0.0062
固定效应面板模型	0.0172	0.0188	0.0117
传统变系数面板模型	0.0915	0.0465	0.0315
$N = 20$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0136	0.0249	0.0189
固定效应面板模型	0.0137	0.0581	0.0583
传统变系数面板模型	0.0891	0.2271	0.1521
$N = 30$			
趋势函数系数面板模型	0.0381	0.0173	0.0121
固定效应面板模型	0.0600	0.0571	0.0523
传统变系数面板模型	0.4587	0.2396	0.1567

附表 8 三种模型在不同样本下的 AMSE 结果 ($\eta_{it} = 0.5 \eta_{i-1,t} + \eta_{it}, i \geq 1, \eta_{0t} = 0$)

T	10	20	30
$N = 10$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0174	0.0111	0.0065
固定效应面板模型	0.0175	0.0129	0.0118
传统变系数面板模型	0.0943	0.0478	0.0318
$N = 20$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0132	0.0053	0.0034
固定效应面板模型	0.0135	0.0114	0.0509
传统变系数面板模型	0.0901	0.0448	0.0988
$N = 30$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0078	0.0345	0.0120
固定效应面板模型	0.0119	0.0702	0.0523
传统变系数面板模型	0.0942	0.1882	0.1600

附表 9 模拟 6 中数据估计量的均方误差（AMSE）

$T \backslash N$	10		20		30	
	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$	$\hat{m}_1$	$\hat{m}_2$
10	0.1455	0.1571	0.0233	0.0171	0.0143	0.0111
20	0.0410	0.0413	0.0199	0.0185	0.0135	0.0123
30	0.0280	0.0262	0.0135	0.0122	0.0089	0.0078
	$\hat{f}$		$\hat{f}$		$\hat{f}$	
10	0.1270		0.0089		0.0062	
20	0.0217		0.0068		0.0052	
30	0.0092		0.0053		0.0044	

附表 10 模拟 7 中趋势函数系数面板模型与传统变系数模型回归系数估计量的均方误差（AMSE）

T	10	20	30
$N = 10$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0733	0.0273	0.0151
传统变系数模型	0.2177	0.0898	0.0481
$N = 20$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0479	0.0145	0.0117
传统变系数模型	0.2563	0.1102	0.0531
$N = 30$			
趋势固定效应函数系数面板模型	0.0225	0.0157	0.0055
传统变系数模型	0.2339	0.1024	0.0423